# משפט

דרגת השורות של מטריצה שווה לדרגת העמודות שלה ומסומנת ב:

# תרגיל 6.11(עמ' 25)

יהיו . נתון . הוכיחו:

א) אין בA שורת אפסים.  
ב) A אינה שקולה למטריצה עם שורת אפסים.  
ג) קיימת כך ש*ד) A הפיכה  
ה) B הפיכה*

## פתרון

א) נניח בשלילה שקיים כך ש. אזי וזאת סתירה כי ב אין שורת אפסים.

ב) נניח בשלילה שA כן שקולה למטריצה עם שורת אפסים M(ובM יש שורת אפסים במקום הi): . קיימת P הפיכה(מט' אלמנטרית) כך ש. בM יש שורת אפסים ולכן בPA יש שורת אפסים:  
*שימו לב שP הפיכה ולכן קיימת B כך ש, אבל אז לפי א' מקבלים שאין בP שורת אפסים לכן קיבלנו סתירה.*

*ג) A אינה שקולה למטריצה עם שורת אפסים ולכן בצורה המדורגת קנונית שלה אין שורת אפסים => זאת מטריצת היחידה: . נבחר (המטריצה שמדרגת את A לצורתה הקנונית) ואז .*

*ד) (צ"ל A הפיכה, כלומר קיימת B כך ש.)  
, , יש להראות ש ואז נקבל הפיכות.  
לכן ולכן A הפיכה.*

*ה) B הפיכה שכן כפי שהוכחנו קודם .*

## הערה

והיה נתון , והסקנו שA הפיכה.

### מסקנה

עבור מטריצה ריבועית, מספיק למצוא הופכית מצד אחד בכדי שהי תהיה הפיכה).

# תרגיל 11.6

יהיו   
א) הוכיחו שתמיד מתקיים   
ב) תהא . הוכיחו: A הפיכה ⬄

## פתרון

1. נוכיח אחד מהם:   
   הדרך הטבעית לגשת לדרגת המטריצה היא באמצעות מרחב השורה/העמודה.  
   כלומר כל עמודה בAB היא צירוף לינארי של עמודות A ולכן ולכן ולכן .
2. צ"ל הפיכה ⬄   
   A הפיכה לכן קיימת B כך ש. מצד אחד , אבל לא יכול להיות ש ולכן   
   כיוון שני  
   כלומר כל הוא צ"ל של עמודות A כלומר לכל קיימים כך ש . זה נכון לכל b ולכן גם לכל , : לכל קיימים סקלרים כך ש. נבנה מטריצה B:  
   מתקיים:

וכך בנינו את המטריצה ההופכית של A

# תרגיל 11.11

תהי . הוכיחו א=>ב=>ג=>...=>ז=>א (ז"א התנאים הבאים שקולים)

1. A הפיכה
2. לכל למערכת יש פתרון יחיד.
3. קיים כך שלמערכת יש פתרון יחיד.
4. למערכת יש רק את הפתרון הטריוויאלי.
5. עמודות A בת"ל
6. שורות A בת"ל

## פתרון

א=>ב  
, A הפיכה ולכן כלומר – זהו הפתרון(אם נציב אותו במע' נקבל פסוק אמת) והוא גם יחיד: => => .

ב=>ג – טריוויאלי

ג=>ד  
ניזכר בקשר שבין מע' הומוגנית ללא הומוגנית: . הראנו שאם אזי   
אצלנו: לפי ג', L באמת לא ריקה => והפתרון היחיד למע' הומוגנית הוא הטריוויאלי

ד=>ה  
אבל לפי ד' ולכן עמודות A בת"ל.

ה=>ו  
עמודות A בת"ל. לA יש n עמודות => =>

ו=>ז – טריוויאלי:

ז=>א  
1) שורות A בת"ל => => => וכבר הראנו בתרגיל 11.6 שA הפיכה.  
2) שורות A בת"ל => => כל וקטור הוא צ"ל של שורות A. בפרט הוא צ"ל של שורות A: ולכן:  
ולכן A הפיכה.

אלגוריתם למציאת מטריצה הופכית

מצאו עבור

השיטה היא:  
ואז יוצא